МАТЕМАТИЧКИ ВЕСНИК
58 (2006), 77–83

UDK 517.518.5
оригинални научни рад
article de recherche

VALEURS DES ONDELETTES AUX BORDS D'UN INTERVALLE

Mostefa Nadir

Abstract. The aim of this work is to find an approximative method for computing the scaling functions constructed on an interval at edges, using the inner product in $L^2([0,1])$ between the scaling function and its derivative.

Introduction

Comme il connu, sur l'intervalle $[0,1]$ les valeurs des fonctions échelles, ondelettes aux bords ne sont pas nuls [2], malheureusement, il n'existe aucune méthode de calcul pour y arriver et cela dû au système algébrique homogène obtenu par la relation (4) [5].

L'idée de ce travail est de faire un petit détour, on utilisant le produit scalaire dans $L^2([0,1])$ de la fonction échelle construite sur un intervalle et sa dérivée, résoudre le système algébrique obtenu pour avoir une meilleur approximation de ces fonctions aux bords 0 et 1.

Analyse multirésolution

Une analyse multirésolution de $L^2([0,1])$ est la donnée d'une suite croissante $\{V_j\}_{j\geq j_0}$, $j, j_0 \in \mathbf{Z}$ de sousespaces fermés de $L^2([0,1])$ ayant les propriétés suivantes

$$\bigcup_{j=j_0}^{\infty} V_j \quad \text{est dense dans } L^2([0,1]), \tag{1}$$

$$\forall f \in L^2([0,1]), \forall j, j_0 \in \mathbf{Z}, j \geq j_0, \text{ on a } f(x) \in V_j \Rightarrow f(2x) \in V_{j+1}, \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\{\Phi_{jk},\ j \geq j_0, k = 0,1,\dots,2^j-1\} &= \{\phi^L_{jk},\ k = 0,1,\dots,N-1\} \cup \\ &\cup \{\phi_{jk},\ k = N,\dots,2^j-N-1\} \cup \{\phi^R_{jk},\ k = -N,\dots,-1\},\end{aligned} \tag{3}$$

est un système constituant une base orthonormée de V_j, où

$$\phi^L_{jk}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \phi^L_k(2^j x), \quad \phi_{jk}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \phi(2^j x - k), \quad \phi^R_{jk}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \phi^R_k(2^j x),$$

AMS Subject Classification: 65N30, 65D25, 65A15, 15A18

Keywords and phrases: Wavelets with a compact support, multiresolute analysis, wavelets on an interval.

sont respectivement, les fonctions échelles du bord 0, internes et du bord 1, données par:

pour $x \geq 0$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, on a $\Phi_k(x) = \phi_k^L(x)$,

$$\phi_k^L(x) = \sqrt{2}\sum_{l=0}^{N-1} H_{k,l}^L \phi_l^L(2x) + \sqrt{2}\sum_{m=N}^{N+2k} h_{k,m}^L \phi(2x-m), \tag{4}$$

pour $x \geq 0$, $k = N, \dots, 2^j - N - 1$, on a $\Phi_k(x) = \phi_k(x)$,

$$\phi_k(x) = \phi(x-k) = \sqrt{2}\sum_{q=-N+1}^{N} h_q \phi(2x - 2k - q), \tag{5}$$

pour $x \leq 0$, $k = -N, \dots, -1$, on a $\Phi(x) = \phi_k^R(x)$,

$$\phi_k^R(x) = \sqrt{2}\sum_{l=-N}^{-1} H_{k,l}^R \phi_l^R(2x) + \sqrt{2}\sum_{m=2k-N+1}^{-N-1} h_{k,m}^R \phi(2x-m). \tag{6}$$

D'une façon analogue, on définit W_j le sousespace supplémentaire de V_j dans V_{j+1} comme étant le sousespace engendré par la base orthonormée,

$$\begin{aligned}\{\Psi_{jk},\ j \geq j_0, k = 0, 1, \dots, 2^j - 1\} &= \{\psi_{jk}^L,\ k = 0, 1, \dots, N-1\} \\ &\cup \{\psi_{jk},\ k = N, \dots, 2^j - N - 1\} \cup \{\psi_{jk}^R,\ k = -N, \dots, -1\},\end{aligned}$$

où

$$\psi_{jk}^L(x) = 2^{\frac{j}{2}}\psi_k^L(2^j x), \quad \psi_{jk}(x) = 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j x - k), \quad \psi_{jk}^R(x) = 2^{\frac{j}{2}}\psi_k^R(2^j x),$$

sont respectivement les ondelettes du bord 0, internes et du bord 1, vérifiant les systèmes algébriques:

pour $x \geq 0$, $k = 0, 1, \dots N-1$, on a $\Psi_k(x) = \psi_k^L(x)$

$$\psi_k^L(x) = \sqrt{2}\sum_{l=0}^{N-1} G_{k,l}^L \phi_l^L(2x) + \sqrt{2}\sum_{m=N}^{N+2k} g_{k,m}^L \phi(2x-m), \tag{4'}$$

pour $x \geq 0$, $k = N, \dots, 2^j - N - 1$, on a $\Psi_k(x) = \psi_k(x)$

$$\psi_k(x) = \psi(x-k) = \sqrt{2}\sum_{q=-N+1}^{N} g_q \phi(2x - 2k - q), \tag{5'}$$

pour $x \leq 0$, $k = -N, \dots, -1$, on a $\Psi(x) = \psi_k^R(x)$

$$\psi_k^R(x) = \sqrt{2}\sum_{l=-N}^{-1} G_{k,l}^R \phi_l^R(2x) + \sqrt{2}\sum_{m=2k-N+1}^{-N-1} g_{k,m}^R \phi(2x-m). \tag{6'}$$

De la relation $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$, et de (1), on obtient

$$V_J \bigoplus_{j=J}^{\infty} W_j = L^2([0,1]),\ J \geq j_0,\ 2^{j_0} \geq 2N,$$

ce qui donne la décomposition de toute fonction f de $L^2([0,1])$,

$$f(x) = P_J f(x) + \sum_{j=J}^{\infty} Q_j f(x), \tag{7}$$

où P_J est la projection orthogonale de la fonction f sur V_J et Q_j sa projection orthogonale sur W_j.

Moments des fonctions échelles sur un intervalle

Notons par $m_k^{L,i}$ le moment d'ordre i de la fonction ϕ_k^L défini par

$$m_k^{L,i} = \int_0^\infty x^i \phi_k^L(x)\,dx,$$

de la relation échelle (4), on obtient pour $i = 0$, le système algébrique suivant

$$m_k^{L,0} = \sqrt{2}\sum_{l=0}^{N-1} H_{k,l}^L \frac{m_k^{L,0}}{2} + \sqrt{2}\sum_{m=N}^{N+2k} h_{k,m}^L \frac{M_0}{2},$$

où $M_0 = 1$. En effet, on a $m \geq N$, d'où

$$\int_0^\infty \phi(x-m)\,dx = \int_{-m}^\infty \phi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)\,dx = 1,$$

ce qui implique pour différentes valeurs de i, on a le système algébrique suivant [8],

$$2^i\sqrt{2}m_k^{L,i} = \sum_{l=0}^{N-1} H_{k,l}^L m_k^{L,i} + \sum_{m=N}^{N+2k} h_{k,m}^L\Big(\sum_{j=0}^{i}\tbinom{i}{j} m^j M_{i-j}\Big),$$

où M_p est le moment d'ordre p de la fonction échelle sur $\mathbf{R}$ et $\binom{i}{j} = \frac{i!}{j!(i-j)!}$.

De la même façon, on trouve les moments $m_k^{R,i}$ des fonctions échelles ϕ_k^R, [8].

$$2^i\sqrt{2}m_k^{R,i} = \sum_{l=-N}^{-1} H_{k,l}^R m_k^{R,i} + \sum_{m=2k-N+1}^{-N-1} h_{k,m}^R\Big(\sum_{j=0}^{i}\tbinom{i}{j} m^j M_{i-j}\Big).$$

Applications

Moments des fonctions échelles ϕ^L, ϕ^R et ϕ pour D_4 Daubechies à deux moments nuls [8], [9], avec $i = 0, 1, 2$.

i	$m_0^{L,i}$	$m_1^{L,i}$	$m_{-2}^{R,i}$	$m_{-1}^{R,i}$	M_i
0	0.3620521	1.001445	1.089843	1.295480	1.000000
1	-0.1509356	1.032428	-1.995769	-0.7217156	0.6339746
2	-0.3873851	1.166270	3.499148	0.5874012	0.4019238

Les moments des fonctions échelles sur un intervalle
pour $N = 2$ (D_4 Daubechies)

Produit scalaire des fonctions échelles sur un intervalle

Notons par θ_{jkl} la matrice du produit scalaire $\langle \Phi'_{jk}, \Phi_{jl}\rangle$ donnée par

$$\begin{aligned}\theta_{jkl} &= \int_0^1 \Phi'_{jk}(x)\Phi_{jl}(x)\,dx = 2^j\int_0^{2^j} \Phi'_k(x)\Phi_l(x)\,dx\\ &= 2^j\int_0^\infty \Phi'_k(x)\Phi_l(x)\,dx = 2^j\theta_{kl},\end{aligned}$$

soit Θ la matrice définie par $\Theta = \theta_{kl}$ où

$$\theta_{kl} = \langle \Phi'_k, \Phi_l \rangle = \int_0^\infty \Phi'_k(x)\Phi_l(x)\,dx.$$

La construction des fonctions échelles sur un intervalle, nous montre que la matrice $\Theta = \theta_{kl}$ dépend de neuf sousmatrices réparties comme suit

$$\Theta = \theta_{kl} = \begin{pmatrix} \theta^{LL} & \theta^{LI} & \theta^{LR} \\ \theta^{IL} & \theta^{II} & \theta^{IR} \\ \theta^{RL} & \theta^{RI} & \theta^{RR} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
\theta^{LL}_{kl} &= \int_0^\infty \phi'^L_k(x)\phi^L_l(x)\,dx, && k = 0,1,\ldots,N-1, \quad l = 0,1,\ldots,N-1;\\
\theta^{LI}_{kl} &= \int_0^\infty \phi'^L_k(x)\phi(x-l)\,dx && k = 0,1,\ldots,N-1, \quad l = N,\ldots,2^j-N-1;\\
\theta^{IL}_{kl} &= \int_0^\infty \phi'(x-k)\phi^L_l(x)\,dx && k = N,\ldots,2^j-N-1, \quad l = 0,1,\ldots,N-1;\\
\theta^{II}_{kl} &= \int_0^\infty \phi'(x-k)\phi(x-l)\,dx && k = N,\ldots,2^j-N-1, \quad l = N,\ldots,2^j-N-1;\\
\theta^{IR}_{kl} &= \int_{-\infty}^0 \phi'(x-k+2^j)\phi^R_l(x)\,dx && k = N,\ldots,2^j-N-1, \quad l = -N,\ldots,-1;\\
\theta^{RI}_{kl} &= \int_{-\infty}^0 \phi'^R_k(x)\phi(x-l+2^j)\,dx && k = -N,\ldots,-1, \quad l = N,\ldots,2^j-N-1;\\
\theta^{RR}_{kl} &= \int_{-\infty}^0 \phi'^R_k(x)\phi^R_l(x)\,dx, && k = -N,\ldots,-1, \quad l = -N,\ldots,-1.
\end{aligned}$$

La relation entre les fonctions échelles vue au dessus, nous affirme que les éléments des sous matrices $\theta^{LL}, \theta^{LI}, \ldots, \theta^{RR}$ dépendent des éléments de la matrice bloc interne θ^{II}.

Lemme 1. *La matrice $\Theta = \theta_{kl}$ est une matrice bande de demi largeur $2N-1$.*

En effet, dû aux supports compacts et disjoints des fonctions de bords ϕ^L_k, ϕ^R_k, on a

$$\theta^{LR} = \int_0^\infty \phi'^L_k(x)\phi^R_k(x)\,dx = 0,$$

aussi

$$\theta^{RL} = \int_{-\infty}^0 \phi'^R_k(x)\phi^L_l(x)\,dx = 0. \quad \blacksquare$$

Lemme 2. *Les éléments de la matrice interne θ^{II} sont antisymétriques,*

$$\theta^{II}_{kl} = -\theta^{II}_{lk}.$$

De plus, ils vérifient le système algébrique

$$\theta^{II}_{kl} = \theta^{II}_{2k,2l} + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{N} d_{2r-1}(\theta^{II}_{2k,2l+2r-1} + \theta^{II}_{2k+2r-1,2l}). \tag{8}$$

En effet, effectuons à l'expression

$$\theta^{II}_{kl} = \int_0^\infty \phi'(x-k)\phi(x-l)\,dx, \tag{9}$$

une intégration par partie, on obtient

$$\theta^{II}_{kl} = \phi(x-k)\phi(x-l)\mid_0^\infty - \int_0^\infty \phi'(x-l)\phi(x-k)\,dx = -\theta^{II}_{lk},$$

de plus, la relation d'échelle (5) appliquée à l'équation (9), nous mène directement au système (8); trouvé aussi dans [1]. ∎

Lemme 3. *Les éléments de la matrice θ^{LI} vérifient le système algébrique,*

$$\theta^{LI}_{kl} = 2\sum_{p=0}^{N-1}\sum_{q=-N+1}^{N} H^L_{kp} h_q \theta^{LI}_{p,2l+q} + 2\sum_{m=N}^{N+2k}\sum_{q=-N+1}^{N} h^L_{km} h_q \theta^{II}_{m,2l+q}. \tag{10}$$

De plus, on a

$$\theta^{LI}_{kl} = -\theta^{IL}_{lk}.$$

En effet, soit

$$\theta^{LI}_{kl} = \int_0^\infty \phi'^L_k(x)\phi(x-l)\,dx. \tag{11}$$

Les relations d'échelles (4) et (5) appliquée à l'équation (11), donne le système (10); l'intégration par partie de cette l'équation nous nous mène à la relation $\theta^{LI}_{kl} = -\theta^{IL}_{lk}$. ∎

Notons que, le calcul des éléments de la matrice θ^{LI} se fait d'une façon simple et directe, en commençant par les éléments θ^{LI}_{kl} tels que, $2l+q > 3N-3$, pour tout $k = 0, 1, \ldots, N-1$ et d'une façon analogue on trouve les matrices θ^{RI} et θ^{IR}.

Lemme 4. *Les éléments de la matrice θ^{LL} vérifient le système algébrique,*

$$\begin{aligned}\theta^{LL}_{kl} &= 2\sum_{p=0}^{N-1}\sum_{q=0}^{N-1} H^L_{kp} H^L_{lq} \theta^{LL}_{pq} + 2\sum_{p=0}^{N-1}\sum_{s=N}^{N+2l} H^L_{kp} h^L_{ls} \theta^{LI}_{ps} \\ &\quad + 2\sum_{m=N}^{N+2k}\sum_{q=0}^{N-1} h^L_{km} H^L_{lq} \theta^{IL}_{mq} + 2\sum_{m=N}^{N+2k}\sum_{s=N}^{N+2l} h^L_{km} h^L_{ls} \theta^{II}_{ms}.\end{aligned} \tag{12}$$

De plus, on a la relation

$$\theta^{LL}_{kl} + \theta^{LL}_{lk} = -\phi^L_k(0)\phi^L_l(0).$$

En effet, soit

$$\theta_{kl}^{LL} = \int_0^\infty \phi_k'^L(x)\phi_l^L(x)\,dx. \tag{13}$$

La relation d'échelle (4) appliquée à l'équation (13) donne le système algébrique (12) formé de $N \times N$ équations, dont le second membre dépend des éléments des matrices θ^{LI}, θ^{IL} et θ^{II}; trouvé aussi dans [5]. ■

Si on applique une intégration par partie à l'équation (13), on obtient

$$\theta_{kl}^{LL} = \phi_k^L(x)\phi_l^L(x)\mid_0^\infty - \int_0^\infty \phi_l'^L(x)\phi_k^L(x)\,dx.$$

Soit

$$\theta_{kl}^{LL} = -\phi_k^L(0)\phi_l^L(0) - \theta_{lk}^{LL}.$$

Corollaire. *Les valeurs des fonctions échelles sur un intervalle sont données par*

$$\phi_k^L(0) = \pm\sqrt{-2\theta_{kk}^{LL}}. \tag{14}$$

Il suffit de prendre $k = l$ dans l'expression au dessus.

De la même façon on trouve

$$\phi_k^R(0) = \pm\sqrt{2\theta_{kk}^{RR}}. \tag{14'}$$

Il est à remarquer que le calcul de la fonction ϕ_k^L au point 0 en utilisant la relation d'échelle (4) est pratiquement impossible, due à l'homogénéité du système d'équations, par contre, la relation (14) donne les valeurs approximatives de la fonction échelle au bord, bien entendu après avoir résolu le système algébrique (12). Même raisonnement pour la fonction ϕ_k^R au point 1.

Soit

$$\theta^{LL} = \begin{pmatrix} \theta_{00}^{LL} & \theta_{01}^{LL} & \cdots & \theta_{0,N-1}^{LL} \\ \theta_{10}^{LL} & \theta_{11}^{LL} & \cdots & \theta_{1,N-1}^{LL} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \theta_{N-1,0}^{LL} & \theta_{N-1,1}^{LL} & \cdots & \theta_{N-1,N-1}^{LL}. \end{pmatrix}$$

Aussi, on a

$$\theta^{RR} = \begin{pmatrix} \theta_{2^j-N,2^j-N}^{RR} & \theta_{2^j-N,2^j-N+1}^{RR} & \cdots & \theta_{2^j-N,2^j-1}^{RR} \\ \theta_{2^j-N+1,2^j-N}^{RR} & \theta_{2^j-N+1,2^j-N+1}^{RR} & \cdots & \theta_{2^j-N+1,2^j-1}^{RR} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \theta_{2^j-1,2^j-N}^{RR} & \theta_{2^j-1,2^j-N+1}^{RR} & \cdots & \theta_{2^j-1,2^j-1}^{RR} \end{pmatrix}.$$

Applications

$$\theta_2^{LL} = \begin{pmatrix} -1.96344 & -1.52529 \\ 0.93546 & -0.04429 \end{pmatrix}, \qquad \theta_2^{RR} = \begin{pmatrix} 0.08996 & -0.79412 \\ 0.31493 & 0.63712 \end{pmatrix}.$$

Il est aisé de voir que les fonctions échelles ϕ_0^L et ϕ_1^L sont positives au voisinage de 0, par contre les fonctions ϕ_0^R et ϕ_1^R sont de signe contraire, d'où de la relation (14) et (14′), on a

$$\begin{aligned} \phi_0^L(0) &= 1.981636 \\ \phi_1^L(0) &= 0.2976239 \\ \phi_{-2}^R(0) &= -0.4241698 \\ \phi_{-1}^R(0) &= 1.128822 \end{aligned}$$

Pour les différentes valeurs de N (nombres de moments nuls des ondelettes sur un intervalle), on procède de la même manière pour y avoir les valeurs approximatives des fonctions échelles aux bords, les valeurs des ondelettes aux bords se déduisent d'une façon très simple.

REFERENCES

[**1**] G. Beylkin, *On the representation of operators in basis of compactly supported wavelets*, SIAM J. Numer. Anal. **29** (6)(1992), 1716–1740.

[**2**] A. Cohen, I. Daubechies and P. Vial, *Wavelets on the interval and fast wavelets transforms*, Appl. Comput. Harmonic Analysis **1** (1993), 909–996.

[**3**] I. Daubechies, *Orthonormal bases of compactly supported wavelets*, Comm. Pure Appl. Math. **41** (1988), 909–996.

[**4**] L. Jameson, *On the wavelet based differentiation matrix*, J. Sci. Comput., September 1993.

[**5**] L. Jameson, *The differentiation matrix for Daubechies-based wavelets on an interval*, SIAM J. Sci. Comput **17**, 2, 498–516.

[**6**] Y. Meyer, *Ondelettes et opérateurs, Tome 1*, Actualités Mathématiques Hermann, 1990.

[**7**] M. Nadir, *Opérateurs intégraux et bases d'ondelettes*, Far East J. Sci. **6** (6) (1998), 977–995.

[**8**] M. Nadir, *Opérateurs de Hilbert et bases d'ondelettes sur un intervalle*, Far East J. Appl. Math. **4** (1) (2000), 19–42.

[**9**] M. Nadir, *Opérateurs de Cauchy pour des fonctions affines par morceaux et bases d'ondelettes sur un intervalle*, Far East J. Appl. Math. **8** (3) (2002), 231–252.

[**10**] P. Tchamitchian, *Wavelets, Functions and Operateurs, in Wavelets Theory and Applications*, Oxford University Press 1996, pp. 83–181.

(received 13.04.2004)

Laboratoire des Mathématiques Pures et Appliquées, Département de Mathématiques, Faculté des Sciences et Sciences de l'Ingénieur, Université de M'sila, ALGERIE

E-mail: `mostefanadir@yahoo.fr`