

SUR UN ASPECT NUMÉRIQUE DE LA DIMENSION FRACTALE D’UN ATTRACTEUR CHAOTIQUE

N. Akroune

Abstract. In this work, we apply a modified box-counting method to estimate the fractal dimension D of a chaotic attractor E generated by a two-dimensional mapping. The obtained numerical results show that the computed value of the capacity dimension (d_{cap}) tends to a limit value when the number of points ($n = \text{card}(E)$) increases. The function which fits the points $(n, D(n))$ has a sigmoidal form, and its expression characterizes the capacity dimension of chaotic attractors related to different discrete dynamical systems.

1. Introduction

Pour quantifier le degré de complexité ou d’irrégularité d’un ensemble fractal [13], différentes définitions et plusieurs algorithmes de calcul de la dimension fractale ont été proposés dans la littérature [3, 4, 12, 16]. Tricot et al [14] ont aussi étudié le cas où cet ensemble est le graphe d’une fonction.

Dans le cadre des systèmes dynamiques discrets engendrés par des endomorphismes bidimensionnels [10], on s’intéresse dans ce travail à un aspect particulier du calcul numérique de la dimension fractale D d’un attracteur chaotique. Cet aspect est relatif à l’étude de la variation de la valeur calculée de D en fonction du nombre n de points pris sur l’ensemble considéré. L’attracteur en question, lié au modèle proposé par Lopez-Ruiz et Fournier-Prunaret [9], est étudié du point de vue du calcul numérique de sa dimension fractale D , et plus précisément, de sa dimension de *capacité* (d_{cap}) ainsi que celle d’*information* (d_{inf}). Le calcul de D est effectué à l’aide de l’algorithme des boîtes (ou “*box-counting*”); bien que Greenside *et al* [7] en ont montré les limites lorsque la dimension de l’espace de phases est élevée, notons qu’une variante expérimentalement efficace de cet algorithme, qui permet la détermination numérique des dimensions (d_{cap} et d_{inf}) d’un sous-ensemble quelconque de \mathbb{R}^2 , est détaillée dans [1].

A l’aide de cette variante, la dimension fractale D de l’attracteur de Lopez-Fournier E est calculée, avec présentation des diagrammes logarithmiques obtenus.

2010 AMS Subject Classification: 37D45, 37L30, 65D10, 65Y20, 28A80.

Keywords and phrases: Dynamical system; chaotic attractor; fractal set; Capacity dimension; information dimension.

En faisant croître le nombre ($n = \text{card}(E)$) de points sur E , les fonctions d'ajustement adaptées à l'allure des nuages $(n, D(n))$ sont proposées. On met en évidence une relation $D = D(n)$ qui se retrouve dans le cas d'autres attracteurs chaotiques.

2. Le modèle

L'importance des systèmes dynamiques discrets engendrés par des transformations bidimensionnelles non linéaires couplées, ainsi que leurs applications, sont rapportées par de nombreux auteurs [11, 15, 17]. Dans ce contexte, Lopez-Ruiz et Fournier-Prunaret [9] ont proposé et étudié en détail un endomorphisme bidimensionnel $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dépendant d'un paramètre réel λ . L'application continue T est définie par

$$V(x, y) = (f(x, y), f(y, x)) \text{ avec } f(x, y) = \lambda \cdot (3 \cdot y + 1) \cdot x \cdot (1 - x) \quad (1)$$

Quand le paramètre λ parcourt l'axe réel, et plus précisément l'intervalle $[-1.545, 1.0843]$, le système dynamique engendré par T présente une grande complexité dans son comportement asymptotique. Ses ensembles-limites sont de différentes formes : points fixes, cycles de différentes périodes, courbes fermées continues et attracteurs chaotiques. Dans notre étude, on va considérer un cas relatif à ce dernier type d'ensemble-limite. Pour $\lambda = 1.0834$ et partant du point initial $(x_0 = 0.90, y_0 = 0.10)$, la suite des itérés $(x_{k+1}, y_{k+1}) = V(x_k, y_k)$ où $k \in \mathbb{N}$ et V est donnée par (1), converge, après un régime transitoire de (10^8) itérations, vers un attracteur chaotique (noté E), symétrique par rapport à la droite $(y = x)$. Cet ensemble, formé de (10^4) points, est dessiné en Fig. 1.

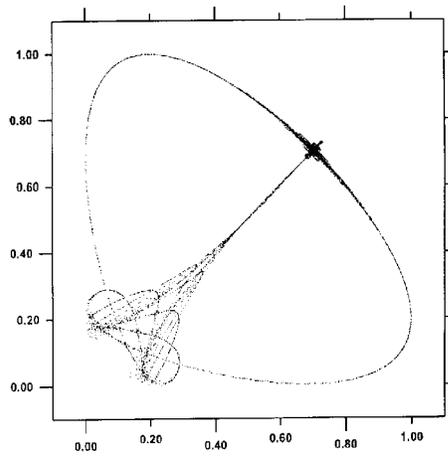


Fig. 1. Attracteur chaotique de V pour $\lambda = 1.0834$

3. Rappels sur les dimensions de capacité et d'information

Dans cette section, on rappelle brièvement les définitions des dimensions de capacité et d'information d'un sous-ensemble quelconque borné ($A \subset \mathbb{R}^p$, $p \geq 1$), mais on considérera ici que A est un attracteur chaotique d'un système dynamique [6]. Pour cela, cet ensemble est d'abord immergé dans une grille de taille ε , c.a.d dont chaque cellule est carrée et a pour côté ε .

3.1. Dimension de capacité (d_{cap}) de A . Si $T(\varepsilon)$ désigne le nombre de cellules non vides (contenant donc au moins un point de A), alors:

$$d_{cap}(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} -\frac{\ln(T(\varepsilon))}{\ln(\varepsilon)}$$

3.2. Dimension d'information (d_{inf}) de A . On suppose l'existence d'une mesure naturelle μ sur A , pour laquelle $\mu(r(\varepsilon))$ désigne la proportion du temps de séjour (ou encore la fréquence de visite) d'une trajectoire typique du système dynamique considéré, dans une cellule quelconque $r(\varepsilon)$ de la grille contenant A . Lors des applications numériques, on approche A par un grand nombre M de points, et on prendra: $\mu(r(\varepsilon)) \approx \frac{|r(\varepsilon)|}{M}$ où $|r(\varepsilon)| = \text{card}(A \cap r(\varepsilon))$.

Si on pose:

$$H(\varepsilon) = \sum_{|r(\varepsilon)| \neq 0} \mu(r(\varepsilon)) \cdot \ln(\mu(r(\varepsilon)))$$

alors la dimension d'information de A est définie par:

$$d_{inf}(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{H(\varepsilon)}{\ln(\varepsilon)}.$$

En pratique, $d_{cap}(A)$ (resp. $d_{inf}(A)$) est assimilée à la pente de la droite aux moindres carrés, liée au nuage $(\ln(\varepsilon), -\ln(T(\varepsilon)))$ (resp. $(\ln(\varepsilon), H(\varepsilon))$) [6]. Les représentations graphiques de ces deux derniers ensembles de points sont appelées "Diagrammes logarithmiques" des dimensions correspondantes.

4. Dimensions de capacité et d'information de l'attracteur chaotique E

La valeur numérique de d_{cap} , donnée par la variante décrite dans [1], atteint une valeur constante lorsque $\text{card}(E) \geq 114 \times 10^3$. En prenant (114×10^3) points sur E , on obtient (voir Fig. 2) les diagrammes logarithmiques relatifs au calcul des deux dimensions (d_{cap} et d_{inf}). Chacun d'eux approche une droite avec une grande précision (coefficients de corrélation $r^2 > 99.9\%$), et les pentes respectives sont $d_{cap} \approx 1.42$ et $d_{inf} \approx 1.48$.

Dans le but d'étudier la variation de ces dimensions en fonction du nombre n de points composant l'attracteur E , on a effectué le calcul des valeurs $d_{cap}(n)$ et $d_{inf}(n)$ en faisant varier l'entier n de (2×10^3) à (116×10^3) par incrément de 10^3 . Les nuages de points $(n, d_{cap}(n))$ et $(n, d_{inf}(n))$ sont tous deux présentés en (Fig. 3).

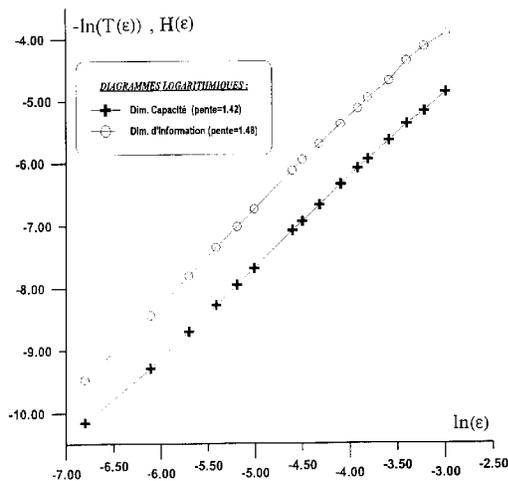


Fig. 2. Diagrammes logarithmiques des deux dimensions (d_{cap}) et (d_{inf})

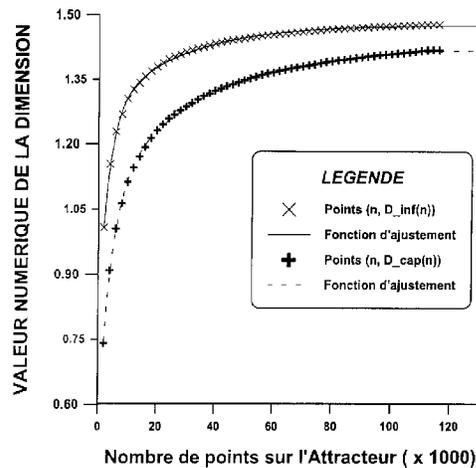


Fig. 3. Points $(n, d_{cap}(n))$ et $(n, d_{inf}(n))$ et leurs fonctions d'ajustements respectives

On remarque sur cette dernière figure que la valeur numérique de d_{cap} croît avec n jusqu'à se stabiliser (avec six décimales exactes) à partir de la valeur (114×10^3) , et la valeur limite est, comme indiqué plus haut, égale à (1.42). Par contre, même pour $(n \sim 10^6)$, on n'observe pas ce type de tendance dans les valeurs numériques de la dimension d'information d_{inf} , mais des oscillations de faibles amplitudes autour de la valeur (1.48). On note toutefois que les deux nuages de points ont des allures générales semblables.

La fonction d'ajustement aux moindres carrés $y = g(x)$, adaptée à chacun des deux ensembles de (58) points $(n, d_{cap}(n))$ et $(n, d_{inf}(n))$, est de forme sigmoïdale

et a la même expression, celle-ci est donnée par:

$$g(x) = \alpha + \beta \cdot (1 - \exp(-x/t_1)) + \gamma \cdot (1 - \exp(-x/t_2)) \quad (2)$$

où $\alpha, \beta, \gamma, t_1, t_2 \in \mathbb{R}^{+*}$.

Pour plus de clarté, les graphes respectifs des fonctions d'ajustements g sont portés en même temps sur la (Fig. 3), et un agrandissement des parties finales de ces graphes est présenté dans la (Fig. 4).

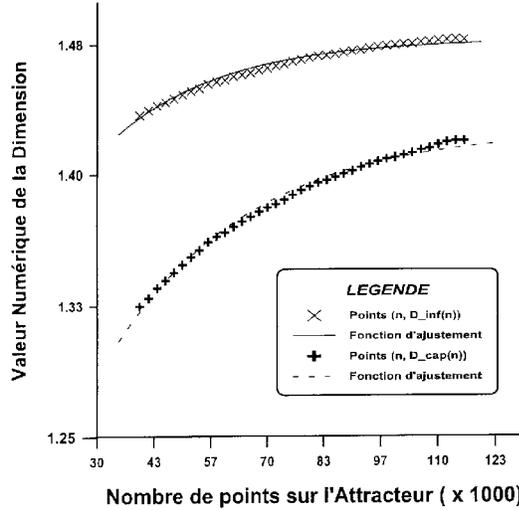


Fig. 4. Zoom sur la partie finale des graphiques de la Fig. 3

Dans la table ci-dessous, on indique les valeurs des constantes $\alpha, \beta, \gamma, t_1$ et t_2 , ainsi que celles des sommes des carrés des résidus (s).

Paramètre	Dimension de Capacité	Dimension d'Information
α	0.509	0.779
β	0.353	0.213
t_1	32.772	25.891
γ	0.564	0.486
t_2	4.137	3.402
s	5.82×10^{-4}	3.35×10^{-4}

5. Attracteur chaotique de l'application V pour $\lambda = 1.04$

Pour $\lambda = 1.04$ et partant du même point initial ($x_0 = 0.90, y_0 = 0.10$) qu'en section 2, les itérés $(x_{k+1}, y_{k+1}) = V(x_k, y_k)$ convergent, après un régime transitoire de (10^8 itérations), vers un attracteur chaotique (noté E'), symétrique par rapport

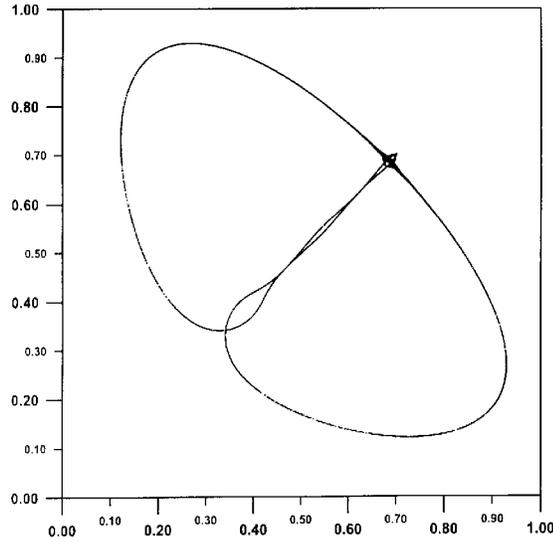


Fig. 5. L'attracteur chaotique (E') obtenu pour $\lambda = 1.04$

à la première bissectrice. L'ensemble (E'), constitué de (10^4) points, est présenté en (Fig. 5).

Dimensions de capacité et d'information de l'attracteur chaotique E' . Pour cette nouvelle valeur de λ , le calcul numérique de d_{cap} se stabilise lorsque ($card(E') \geq 19 \times 10^3$); et on obtient: $d_{cap} \approx 1.01$ et $d_{inf} \approx 1.17$. Notons aussi que le diagramme logarithmique de chacune des deux dimensions approche une droite avec une précision analogue à celle trouvée pour ($\lambda = 1.0834$).

Afin d'étudier la dépendance des valeurs numériques des deux dimensions en fonction du nombre ($n = Card(E')$), le calcul de $d_{cap}(n)$ et $d_{inf}(n)$ est effectué, toujours à l'aide du procédé décrit dans [1], en augmentant l'entier n de (5×10^2) à (19×10^3) par incrément de (5×10^2). Les (38) points composant chacun des ensembles ($n, d_{cap}(n)$) et ($n, d_{inf}(n)$) sont présentés en (Fig. 6), où on a aussi tracé leurs fonctions d'ajustements respectives.

Il est à noter que l'expression de ces deux fonctions est la même que celle relevée pour ($\lambda = 1.0834$), en l'occurrence celle donnée par la fonction g (voir la relation (2) en section 4). En gardant les mêmes notations, les valeurs des cinq paramètres de chacune de ces fonctions d'ajustements sont indiquées dans la table ci-après, ainsi que les sommes des carrés des résidus (s).

Remarque. Le modèle de Hogg-Huberman [8] admet des attracteurs chaotiques dont les deux dimensions (de capacité et d'information) obéissent à la même règle que celle donnée par la relation (2). Plus de détails sur ces attracteurs et sur les valeurs des paramètres de la fonction g sont donnés dans [2].

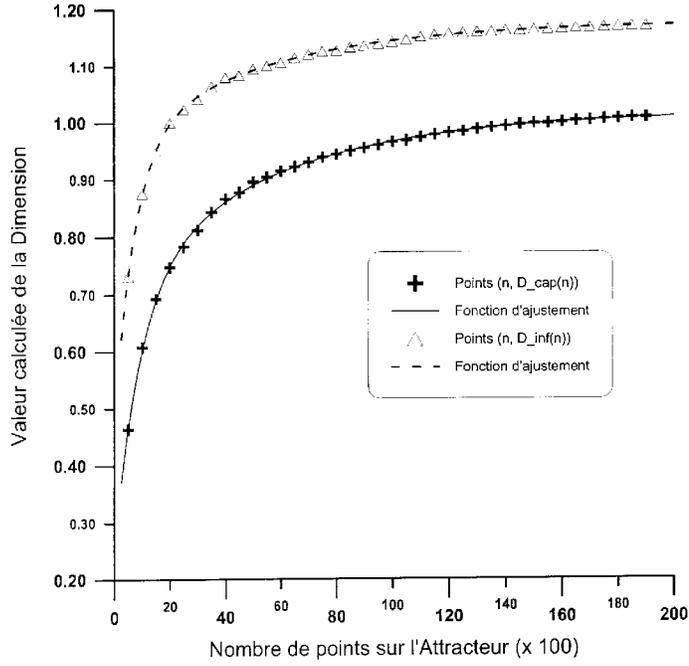


Fig. 6. Les ensembles $(n, d_{cap}(n))$ et $(n, d_{inf}(n))$, et leurs fonctions d'ajustements ($\lambda = 1.04$)

Paramètre	Dimension de Capacité	Dimension d'Information
α	0.24985	0.47026
β	0.46617	0.49267
t_1	9.49904	7.36998
γ	0.3054	0.21425
t_2	57.70409	52.88179
s	2.46×10^{-4}	1.70×10^{-4}

6. Sur la transformation double logistique

Des expérimentations numériques, similaires à celles présentées dans les deux sections précédentes, et menées sur certains attracteurs étranges du système dynamique modélisé par la transformation double logistique (étudiée par Gardini *et al* [5], semblent aussi confirmer l'importante observation liée à l'expression donnée par (2).

Cette application bidimensionnelle dépend d'un paramètre réel $\rho \in [0, 1]$, elle est définie par

$$Q(x, y) = (L(x, y), L(y, x)) \tag{3}$$

où $L(x, y) = (1 - \rho) \cdot x + 4 \cdot \rho \cdot y \cdot (1 - y)$.

Le système généré par la transformation Q présente une dynamique chaotique lorsque le paramètre ρ est proche de la valeur 1, de plus l'attracteur en question tend à remplir le carré unité [5].

En fixant ($\rho = 0.955$), on a suivi une démarche identique à celle du modèle donné par l'équation (1). Pour le modèle Q , il a fallu (126×10^5) itérations pour que la valeur de la dimension de capacité (et d'information), de l'attracteur chaotique associé, se stabilise (à sept décimales près pour d_{cap}), et les limites atteintes sont ($d_{cap} \approx 1.98$) et ($d_{inf} \approx 1.93$).

Pour chacune des deux dimensions, les valeurs des paramètres de la fonction g (équation (2)), ainsi que celles des sommes des carrés des résidus (s), sont reportées dans la table ci-après.

Paramètre	Dimension de Capacité	Dimension d'Information
α	1.3239	1.38768
β	0.48951	0.42033
t_1	1.57715	1.70284
γ	0.17016	0.12276
t_2	10.44823	13.31501
s	3.35×10^{-4}	8.34×10^{-4}

Commentaire. Les valeurs calculées des dimensions de capacité et d'information des attracteurs chaotiques générés par chacun des trois modèles (Lopez-Fournier [9], Hogg-Huberman [8]), et la logistique double [5], varient en fonction du nombre n de points, pris sur l'attracteur considéré, en liaison avec la fonction $g = g(x)$. Cette expression sigmoïdale suggère bien que, lorsque $x \rightarrow \infty$, la dimension fractale calculée est d'autant plus précise que l'approximant de l'attracteur est proche de l'attracteur théorique. Il y a lieu aussi de signaler que les deux composantes de chacun de ces modèles (voir les expressions de V dans (1), de Q dans (3) et du modèle de Hogg-Huberman [8] sont couplées, et par conséquent, la droite ($y = x$) est invariante.

7. Conclusion

L'évaluation numérique des dimensions de capacité d_{cap} et d'information d_{inf} à l'aide d'une variante de la méthode de "box-counting" a été effectuée sur un attracteur chaotique lié au modèle proposé par Lopez-Ruiz et Fournier-Prunaret. En incrémentant le nombre n de points pris sur cet attracteur, on a observé que les valeurs calculées de la dimension de capacité ($d_{cap} = d_{cap}(n)$) et de la dimension d'information ($d_{inf} = d_{inf}(n)$) tendent, chacune, vers une valeur limite. La fonction d'ajustement qui rend compte de cette relation se retrouve dans d'autres modèles de transformations ponctuelles bidimensionnelles.

REFERENCES

- [1] N. Akroune, *Sur une variante de la méthode des boîtes pour la détermination numérique de la dimension fractale d'un sous-ensemble du plan*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, Ser. I **338** (2004), 899–904.
- [2] N. Akroune, D. Fournier-Prunaret, *Dimension fractale d'attracteurs: cas du modèle de Hogg-Huberman*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin **15** (2008), 25–31.
- [3] Y. Ashkenazy, *The use of generalized information dimension in measuring fractal dimension of time series*, Phys. A. **271** (1999), 427–447.
- [4] C. Cutler, *A review of the theory and estimation of fractal dimension*, H. Tong (Ed.), Dimension estimation and models, World Scientific, Singapore, (1993), 1–107.
- [5] L. Gardini, R. Abraham, R. Record, D. Fournier-Prunaret, *A double logistic map*, Internat. J. Bifur. Chaos **4** (1994), 145–176.
- [6] P. Grassberger, I. Procaccia, *Measuring the strangeness of strange attractors*, Phys. D. **9** (1983), 189–208.
- [7] H.S. Greenside, A. Wolf, J. Swift, T. Pignataro, *Impracticality of a box-counting algorithm for calculating the dimensionality of strange attractors*, Phys. Rev. A. **25** (1982), 3453–3456.
- [8] T. Hogg, B.A. Huberman, *Generic behavior of coupled oscillators*, Phys. Rev. A. **29** (1984), 275–281.
- [9] R. Lopez-Ruiz, D. Fournier-Prunaret, *Complex pattern on the plane : different types of basin fractalization in a two-dimensional mapping*, Internat. J. Bifur. Chaos **13** (2003), 287–310.
- [10] C. Mira, L. Gardini, A. Barugola, J.C. Cathala, *Chaotic dynamics in two-dimensional non-invertible maps*, World Scientific on Nonlinear Sciences, Series A, Vol. **20**, Singapore, 1996.
- [11] R.L. Schult, D.B. Creamer, F.S. Hensey, J.A. Wright, *Symmetric and non symmetric coupled logistic maps*, Phys. Rev. A **35** (1987), 3115–3118.
- [12] C. Taylor, S. Taylor, *Estimating the dimension of a fractal*, J. R. Stat. Soc. B **53** (1991), 353–364.
- [13] C. Tricot, *Courbes et dimension fractale*. 2^{ème} éd., Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [14] C. Tricot, J.F. Quiniou, D. Wehbi, C. Roques-Carmes, B. Dubuc, *Evaluation de la dimension fractale d'un graphe*, Revue de physique appliquées **23** (1988), 111–124.
- [15] R. van Biskirk, C. Jeffries, *Observation of chaotic dynamics of coupled nonlinear oscillators*, Phys. Rev. A **31** (1985), 3332–3357.
- [16] Y.G. Wang, Y.X. Lin, M.D.E. Haywood, *A quasi-likelihood method for fractal dimension estimation*, Math. Comput. Simulation **48** (1999), 429–436.
- [17] J.M. Yuan, M. Tung, D.H. Feng, L.M. Narducci, *Instability and irregular behaviour of coupled logistic maps*, Phys. Rev. A **28** (1983), 1662–1666.

(received 13.04.2010; in revised form 10.11.2010)

Département de Mathématiques, Faculté des Sciences Exactes, Université de Béjaïa 06000 – Algérie

E-mail: akroune_n@yahoo.fr