MATEMATIČKI VESNIK
МАТЕМАТИЧКИ ВЕСНИК
74, 3 (2022), 214–217
September 2022

research paper
оригинални научни рад

# КОМПЛЕКСНАЯ ФОРМУЛА КРОФТОНА

**Владимир Антонович Зорич**

**Аннотация**. Одной из начальных и в то же время ключевых формул интегральной геометрии является формула Крофтона. Мы рассматриваем комплексный вариант формулы Крофтона.

## 1. Предисловие

**Эта статья посвящается Мите Фуксу – самому юному однокурснику.**

По случаю 80-летия Дмитрия Борисовича Фукса, разностороннего математика, первопроходца гомотопической топологии, прочитавшего первый такой курс лекций на мехмате МГУ[1], издан сборник статей https://www.emis.de/journals/SIGMA/Fuchs.html.

В сентябре 2020 года Сергей Табачников, один из организаторов сборника, сообщил, что теперь Дмитрию Борисовичу Фуксу ровно 10000 лет в троичной системе. А теперь ему уже 10002 года в той же системе. Эта заметка была написана под впечатлением замечательной книги [6].

## 2. Введение

Одной из начальных и в то же время ключевых формул интегральной геометрии является формула Крофтона [3, 6], которую мы приведём ниже, введя нужные понятия и обозначения. Мы рассмотрим здесь комплексный вариант формулы Крофтона.

*2020 Mathematics Subject Classification*: 53C65, 32F45
*Keywords and phrases*: Integral geometry; Crofton formula; complex analysis; Fubini–Study metric.

[1] В частности, записи этого курса легли в основу книги [7]

Несколько слов об истории. Считается, что всё началось с общеизвестной теперь задачи Бюффона об игле[2](которую бросают на разлинованную параллельными прямыми плоскость).

Затем Коши подсчитал среднюю длину $\frac{2}{\pi}l$ проекции отрезка длиной $l$ на прямую или, что то же самое, математическое ожидание длины ортогональной проекции отрезка на прямую, лежащую в той же плоскости.

Потом эти простые, но важные, вопросы и результаты получили богатое развитие, включая преобразование Радона и томографию. Крофтон в 1870-е годы уже обсуждает общий вопрос о пересечении случайной прямой с множеством на плоскости.

Мера (единственная с точностью до нормирующего множителя) в множестве прямых на плоскости, инвариантная относительно движений плоскости, порождается следующим заданием прямой. Пусть $\theta$– это полярный угол перпендикуляра, опущенного на прямую из начала координат, а $h$ – расстояние от начала координат до прямой. Пара $(\theta, h)$ вполне определяет прямую, а искомая инвариантная мера имеет вид $dL = \alpha\ d\theta \wedge dh$, где $\alpha$ – постоянный нормирующий множитель.

Удобно взять нормированную меру $dL = \frac{1}{2}\ d\theta\wedge dh$, при которой мера множества прямых, пересекающих отрезок, совпадает с длиной отрезка. Тогда, аппроксимируя спрямляемую кривую $\gamma$ ломаной и переходя к пределу, можно подсчитать меру множества всех прямых, пересекающих кривую $\gamma$, *если учесть кратность пересечения*, что очень естественно.

Это позволяет написать следующую формулу Крофтона[3]

$$\int_{\{L\}} \mathrm{card}(\gamma \cap L) dL = |\gamma|\ ,$$

где $|\gamma|$ – длина кривой $\gamma$.

## 3. Формула Крофтона в $\mathbb{C}^2$

Покажем, что при определённой интерпретации написанная формула справдлива и в комплексном варианте.

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{C}^2$ множество $L$ всех комплексных прямых. Координатами в $L$ будут пары $(g, z)$, где $g = \mathbb{C}^1$ есть элемент комплексного многообразия Грассмана $Gr_1(\mathbb{C}^2)$ комплексных подпространств (в данном случае комплексных прямых) $g = \mathbb{C}^1$ комплексной размерности 1 в пространстве $\mathbb{C}^2$, а $z \in g$ – та точка $g$, через которую проходит единственная соответствующая паре $(g, z)$ комплексная прямая, ортогональная подпространству $g$.

[2]По одним сведениям она была опубликована в 1777 году. По другим в записях Бюффона она появилась уже в 1733 году вместе с "непрерывной вероятностью". Главная заслуга Бюффона перед теорией вероятностей (не говоря о его основном труде – многотомной естественной истории, дающей общую картину Жизни на Земле) состоит в рассмотрении вероятностей, отнесённых к непрерывно распределённым объектам, а не только к монетам, игральным костям и тому подобным вещам (см. [2]).

[3]Которую, как видно, можно было бы называть и формулой Коши-Крофтона.

На множестве $L$ возникает единственная с точностью до постоянного множителя мера $dL$, инвариантная относительно группы комплексных движений пространства $\mathbb{C}^2$. Она является прямым произведением меры на многообразии Грассмана $Gr_1(\mathbb{C}^2) \sim \mathbb{S}^2$ (здесь она порождается метрикой Фубини-Штуди) и стандартной лебеговой меры (площади) на $g = \mathbb{C}^1 \sim \mathbb{R}^2$.

Утверждается, что если $\gamma$ – голоморфная кривая, а $|\gamma|$ – её мера (площадь $\gamma$ как вещественно двумерной поверхности), то при соответствующей нормировке меры $dL$ справедлива та же формула Крофтона.

Заметим, что из такой комплексной формулы Крофтона, например, следует, что если голоморфная кривая $\gamma \subset \mathbb{C}^2$ проходит через центр шара и её граница лежит на границе этого шара, то её площадь не меньше площади экваториального сечения этого шара. [4]

## 4. Доказательство формулы Крофтона

Дадим такое доказательство исходной формулы Крофтона, которое, как будет видно, действует и в комплексном случае.

Прежде всего, отметим, что левая и правая части формулы не меняются при изометричных преобразованиях (движениях) плоскости. Кроме того, они аддитивны относительно $\gamma$.

Заметим теперь, что при гомотетии плоскости с коэффициентом гомотетии $\lambda$ мера $dL = \alpha\, d\theta \wedge dh$ меняется в $\lambda$ раз (а не в $\lambda^2$ раз, как это было бы с площадью любой области на самой плоскости). Вместе с тем, длина любого отрезка, а с учётом аддитивности и любой спрямляемой кривой, тоже меняется в $\lambda$ раз.

Значит, левая и правая части формулы пропорциональны. Выбором нормировки меры $dL$ можно добиться равенства. Для этого достаточно реализовать равенство в случае отрезка единичной длины. Доказательство завершено.

Это доказательство классической формулы Крофтона (выполненное в лучших традициях теории размерностей физических величин) автор вычитал в превосходно написанной книге [6]. Всё, что мы здесь делаем, по сути сводится к замечанию, что такое доказательство действует и в должным образом сформулированном комплексном варианте формулы Крофтона. Перенося это рассуждение на комплексный случай, описанный выше, надо лишь позаботиться о том, чтобы, например, единичный (вещественно двумерный) квадрат, лежащий на комплексной прямой в $\mathbb{C}^2$, имел меру 1.

[4] Мне приятно в этой связи поблагодарить Владимира Драговића и Дарка Милинковића – авторов книги *Анализа на многострукостима* (Београд, Математички факултет, 2003, 573 стр.), подаривших мне её. Книга очень насыщенная. В частности, там на странице 337, как раз в связи голоморфными кривыми, упомянут этот классический факт геометрии минимальных поверхностей.

## 5. Заключительные замечания

Приведённые конструкции, очевидно, допускают многомерное обобщение. Оно приводит к многомерной формуле Коши-Крофтона. Доказательство такой формулы, как и её комплексного варианта, остаётся тем же, что и в рассмотренном выше простейшем, но базовом случае.

Эволюцию вопросов, методов и приложений интегральной геометрии интересно проследить, например, сравнив книги $[1, 4, 5]$.

## Список литературы


**[1]** И. М. Гельфанд, М.И. Граев, Н.Я. Виленкин, *Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений*, Обобщенные функции, выпуск 5. М.: Физматлит, 1962.

**[2]** М. Громов, *Кольцо тайн: вселенная, математика*, мысль. Москва, МЦНМО, 2017.

**[3]** М. Л. Громов, *Красочные категории*, УМН, **70(4)** (424) (2015), 3—76.

**[4]** М. Кендалл, П. Моран, *Геометрические вероятности*, Москва, Наука, 1972.

**[5]** Л. А. Сантало, *Введение в интегральную геометрию*, Москва, Издательство Иностранной Литературы, 1956.

**[6]** С. Л. Табачников, Д. Б. Фукс, *Математический дивертисмент*, (2-е, исправленное), Москва, МЦНМО, 2016.

**[7]** A. Fomenko, D. Fuchs, *Homotopical Topology*, Springer Graduate Texts in Mathematics, 2016.


(received 20.05.2021; in revised form 16.06.2021; available online 31.1.2022)

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
*E-mail*: vzor@mccme.ru

## COMPLEX CROFTON FORMULA

**Vladimir Antonovich Zorich**

**Abstract**. One of the initial and at the same time key formulas of integral geometry is Crofton's formula. We consider a complex version of Crofton's formula.