МАТЕМАТИЧКИ ВЕСНИК
46 (1994), 1–4

UDC 517.518.6
оригинални научни рад
научная работа

О ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ

Ю. Кнежевич-Милянович

Резюме. В работе рассматриваются достаточные условия существования почти-периодического решения дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y + q(x),$$

где функции $p(x)$, $q(x)$ — Sp-почти-периодические функции Степанова. Предложен численно-аналитический алгоритм построения почти-периодических решений такого класса уравнений.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y + q(x), \tag{1}$$

где функции $p(x)$, $q(x)$ — Sp-почти-периодические функции Степанова [1]. В работе рассматриваются достаточные условия существования почти-периодического решения дифференциального уравнения (1). Предложен численно-аналитический алгоритм построения почти-периодических решений такого класса уравнений.

1. Теорема 1. *Если среднее значение функции $p(x)$ ($M\{p(x)\}$) не равно нулю, то функция*

$$y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,t)q(t)\,dt \tag{2}$$

где $G(x,t)$ — функция Грина, является почти-периодическим (п.п.) решением уравнения (1).

Доказательство. Пусть для определенности

$$M\{p(x)\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} p(t)\,dt = a > 0. \tag{3}$$

Рассмотрим функцию

$$G(x,t) = \begin{cases} \exp(\int_t^x p(s)\,ds), & \text{при } x \geqslant t, \\ 0, & \text{при } x < t. \end{cases}$$

Она является функцией Грина для уравнения (1), т.е. выполняются следующие условия:

1) $\dfrac{dG(x,t)}{dx} - p(x)G(x,t) \equiv 0$ при $x \neq t$,
2) функция $G(x,t)$ — непрерывна по совокупности переменных $x \neq t$ и $G(x+0,x) - G(x-0,x) = 1$,
3) $|G(x,t)| \leqslant Ne^{\mu|x-t|}$, (4)

где N и μ — некоторые положительные постоянные. Условия 1), 2) нетрудно можно проверить. Проверим выполнение условия 3). Так как ([1], стр. 231)

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T+a}^{T+a} p(t)\,dt = M\{p(x+a)\} = M\{p(x)\}$$

равномерно по a, то существует такое число $\bar{T} > 0$, что для всякого $T > \bar{T}$ выполняется неравенство $(1/2T)\int_{a-T}^{a+T} p(t)\,dt > \mu$, $0 < \mu < a$, равномерно по a. Следовательно, при $x - t > 2\bar{T}$ справедливо $\exp(\int_t^x p(s)\,ds) \leqslant e^{\mu|x-t|}$. Аналогично, неравенство (4) справедливо и для $x - t \leqslant 2\bar{T}$. Функция (2) удовлетворяет уравнению (1), и покажем, что она является п.п. решением уравнения (1). Для доказательства почти-периодичности функции $y(x)$ рассмотрим ([1])

$$Sp = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\int_n^{n+1} N^q e^{\mu|z|^q}\,dz\right)^{1/q}, & \text{при } p > 1, \\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sup_{n\leqslant z\leqslant n+1} Ne^{\mu|z|}, & \text{при } p = 1. \end{cases}$$

Используя неравенство (4), легко показать, что

$$Sp = \begin{cases} 2N\dfrac{1}{1-e^{\mu}}\left(\dfrac{1-e^{\mu q}}{\mu q}\right), & \text{при } p > 1, \\ 2N\dfrac{1}{1-e^{\mu}}, & \text{при } p = 1. \end{cases}$$

Тогда при $p > 1$, учитывая неравенство Гельдера,

$$\begin{aligned} y(x) &\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |G(x,t)|\,|q(t)|\,dt \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} Ne^{\mu|x-t|}|q(x)|\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} Ne^{\mu z}|q(z+t)|\,dz = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_n^{n+1} Ne^{\mu|z|}|q(z+t)|\,dz \\ &\leqslant \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\int_n^{n+1} |Ne^{\mu|z|}|^q\,dz\right)^{1/q} \left(\int_n^{n+1} |q(z+t)|^p\,dz\right)^{1/p} \\ &\leqslant Sp\|q\|_p, \end{aligned}$$

где ([1], стр. 200) $\|q\|_p = \sup_x (\int_x^{x+1} |q(s)|^p\,ds)^{1/p}$. Следовательно,

$$\|y\| = \sup_x |y(x)| \leqslant Sp\|q\|_p. \tag{5}$$

При $p = 1$ доказательство аналогично. Из неравенства (5) следует, что $y(x)$ — п.п. функция. При $a < 0$ доказательство аналогично. ■

2. Функции $p(x)$, $q(x)$ представим рядами Фурье вида:

$$p(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p_n e^{i\lambda_n x}, \quad q(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q_n e^{i\lambda_n x}, \tag{6}$$

где множество $\{\lambda_n\}$ називается спектром функций $p(x)$, $q(x)$. Почти-периодическое решение $y(x)$ уравнения (1) будем также искать в виде (6) с неизвестными коэффициентами y_n. Подставляя разложения $p(x)$, $q(x)$, $y(x)$ вида (6) в (1), и приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях $e^{i\lambda_n x}$, получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных y_n:

$$i\lambda_n y_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_{n-k} y_k + q_n \quad (-\infty < n < +\infty). \tag{7}$$

Предположим, что $\lambda_n - p_0$ не обращается в нуль при свех возможних n (т.е. рассматривается некритический случай), и преобразуем систему (7):

$$y_n = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq n}}^{+\infty} \frac{p_{n-k}}{\lambda_n - p_0} + \frac{q_n}{\lambda_n - p_0} \quad (-\infty < n < +\infty). \tag{8}$$

Теорема 2. *Пусть почти-периодические функции $p(x)$, $q(x)$ из (1) являются равномерными функциями. Пусть $\operatorname{Re} p_0 \neq 0$ и определитель системы, образованной из системы (8) заменой коэффициентов при неизвестных и свободных членов модулями этих величин, отличен от нуля.*

Тогда существует единственное почти-периодическое решение

$$y(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_n e^{i\lambda_n x}$$

и коэффициенты разложения Фурье которого удовлетворяют неравенству

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |y_n|^2 < +\infty, \tag{9}$$

причем это решение может быть найдено по методу редукции, т.е. с помощью предельного перехода в решении конечной системы, получающейся из данной (8) бесконечной, отбрасыванием всех уравнений и неизвестных, начиная с некоторо.

Идея доказательства этой теоремы состоит в следующем ([3]). Для бесконечной линейной алгебраичекой системы (8) строится вспомагательная мажорантная система, все коэффициеты которой не меньше модулей соответствующих коэффициентов системы (8). Если определитель мажорантной системы отличен од нуля, то существует неотрицательное решение этой вспомагателной системы, и оно единственно. Из этого факта следует существование единственного решения системы (8), которое может быть получено методом последовательных приближений. Абсолютные величины y_n полученного решения системы (8) мажорируются соответствующими компонентами решения мажорантной системы, и для решения системы (8) будет справедливо неравенство (9).

Так как из (9) следует, что $|y_n| \to 0$, $n \to \infty$, то процесс построения почти-периодического решения уравнения (1) с заданнной точностю можно сделать итерационным, т.е. решать конечные системы все возрастающего порядка N, пока при некотором N^*, $|y_{-N^*}|$ и $|y_{N^*}|$ не станут меньше заданной точности. Тогда приближенное почти-периодическое решение уравнения (1) будет иметь вид

$$y(x) = \sum_{n=-N^*}^{+N^*} y_n e^{i\lambda_n x}.$$

ЛИТЕРАТУРА

[**1**] Б. М. Левитан, *Почти-периодические функции*, Гостехиздат, Москва 1953

[**2**] Б. М. Левитан, В. В. Жиков, *Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения*, Изд. Московского Университета, Москва 1978

[**3**] Д. К. Лика, Ю. А. Рябов, *Методы итераций и мажорирующие уравнения Ляпунова в теории нелинейных колебаний*, Кишинев, 1974

[**4**] Ю. Кнежевич, *О построении периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений*, Дифференциальные уравнения, Т. XIX, № 2, 1983

(поступило 24.02.1992.)

Математички факултет, Београд, Студентски трг 16