

METHODE VON EULER-SCHEN TYPUS ZUM NÄHERUNGSWEISEN
AUFLOSEN EINER AREOLAREN DIFFERENTIALGLEICHUNG

Miloš Čanak

Abstract. Es sei eine areoläre Differentialgleichung

$$Dw = F(z, \bar{z}, w) \quad (1)$$

mit der Anfangsbedingung

$$\alpha_{a/z} w = w_0(z) \quad (2)$$

gegeben, wobei $w_0(z)$ eine gegebene analytische Funktion ist, und

$$Dw = (u'_x - v'_y) + i(u'_y + v'_x) = 2w'_z$$

den bekannten Differentialoperator von Kolossov darstellt.

In dieser Arbeit löst man die Gleichung (1) mit der Anfangsbedingung (2) durch eine Näherungsmethode vom Euler-schen Typus.

DEFINITION 1. Es sei $\{W \mid w = w(z, \bar{z})\}$ die Menge der komplexen Funktionen, die differenzierbar nach \bar{z} in einem Gebiet G sind, und es sei $\{\Omega \mid \Omega = \Omega(z)\}$ die Menge der analytischen Funktionen in G . Führen wir eine Abbildung $\alpha_{g(z)}$ ($g(z)$ ist eine beliebige analytische Funktion) der Menge W auf die Menge Ω auf folgende Art und Weise ein: Die Funktion $\Omega = \alpha_{g(z)} w$ ist eine solche Funktion, die aus der Funktion $w = w(z, \bar{z})$ entstehen kann, wenn wir den Wert \bar{z} mit $g(z)$ vertauschen und den Wert z unverändert lassen. Die Funktion $\Omega = \alpha_{g(z)} w$ enthält keine Veränderliche \bar{z} , und darum ist sie analytisch. Leicht kann man sehen, dass $\alpha_{g(z)}$ die Menge W auf die Menge Ω abbildet und dass jedem Original w ein und nur ein Bild Ω entspricht. Der geometrische Sinn dieses Operators ist folgender: Wenn $\bar{z} = g(z)$ die Gleichung einer glatten, einfachen, geschlossen oder nichtgeschlossen Kontur ist, so besitzen die Funktionen $w(z, \bar{z})$ und $\alpha_{g(z)} w$ den gleichen Randwert auf dieser Kontur.

Es sei $W(z, \bar{z})$ eine gegebene komplexe Funktion die beliebig oft im Kreisring $P: \sqrt{a} - \delta/2 \leq |z| \leq \sqrt{a} + \delta/2$ nach \bar{z} differenzierbar ist. Nehmen wir an, dass die positive Zahl $b = \sup b_k, k = n + 1, n + 2, \dots$, existiert, wobei b_k Majoranten von $|\alpha_{a/z} D^k W|$ sind. In der Arbeit [1] hat der Verfasser gezeigt, dass sich die Funktion $W(z, \bar{z})$ in P durch ein areoläres Polynom n -ter Ordnung der Form

$$W(z, \bar{z}) \approx f_0(z) + (\bar{z} - a/z)f_1(z) + \dots + (\bar{z} - a/z)^n f_n(z),$$

approximieren lässt. Die Koeffizienten $f_k(z)$ lassen sich durch die Formel

$$f_k(z) = \frac{\alpha_{a/z} D^k W}{2^k k!}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

ausrechnen, wobei

$$DW = (u'_x - v'_y) + i(u'_y + v'_x) = 2W'_z, \quad W = u + iv, \quad (D^k W = D[D^{k-1}W])$$

der bekannte Operator von Kolossov ist. Für die Abschätzung des Approximationsfehlers können wir die Ungleichheit

$$|R| \leq b \frac{(\delta/2)^{n+1}}{(n+1)!} e^{\delta/2}$$

nützen und $|R| \rightarrow 0$ wenn $n \rightarrow \infty$. Im speziellen Fall $n = 1$ haben wir die Approximation

$$W(z, \bar{z}) \approx \alpha_{a/z} W + \frac{\bar{z} - a/z}{2} \alpha_{a/z} DW \quad (3)$$

mit dem Approximationsfehler $|R| \leq (b\delta^2 e^{\delta/2})/8$.

Es sei eine areoläre Differentialgleichung

$$DW = F(a, \bar{z}, W) \quad (4)$$

mit der Anfangsbedingung

$$\alpha_{a/z} W = w_0(z) \quad (5)$$

gegeben, wobei $w_0(z)$ eine gegebene analytische Funktion ist. Nehmen wir an, dass die Funktion $F(z, \bar{z}, W)$ im Gebiet

$$\Pi : \begin{cases} \sqrt{a} - \delta/2 \leq |z| \leq \sqrt{a} + \delta/2 \\ |W - w_0| \leq d \end{cases}$$

stetig ist und dass sie der Bedingung $|F(z, \bar{z}, W) - F(z, \bar{z}, W_1)| \leq L|W_2 - W_1|$ genügt. In seiner Arbeit [2] hat der Verfasser die Existenz einer solchen reellen Zahl $\delta > 0$ gezeigt, dass im Kreisring $P: \sqrt{a} - \delta/2 \leq |z| \leq \sqrt{a} + \delta/2$ eine einzige Lösung der Gleichung (4) mit der Anfangsbedingung (5) existiert.

Es sei ein endliches Intervall $[a, A]$, ($a, A \in \mathbf{R}$) gegeben. Teilen wir dieses Intervall auf n gleicher Abschnitten $a = x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h, \dots, A = x_n = x_0 + nh$, ($h = (A - a)/n$) und konstruieren wir ein System von Kreisen: $K_i: \bar{z} = x_i/z$, ($i = 0, 1, \dots, n$). Eine nichtanalytische, komplexe Funktion kann einerseits in der expliziten Form $W = W(z, \bar{z})$ erscheinen. Andererseits lässt sie sich auch in der Form einer Tabelle, wenn ihre Grenzwerte auf den gegebenen Kreisen $W(z, \bar{z})|_{K_i}$ bekannt sind, darstellen. Durch Ausnützung des Operators α ist manchmal möglich, eine Folge der analytischen Funktionen $w_0(z), w_1(z), \dots, w_n(z)$ zu konstruieren, deren Grenzwerte auf K_i mit den entsprechenden Grenzwerten von $W(z, \bar{z})$ identisch sind. Darstellung einer nichtanalytischen Funktion $W(z, \bar{z})$ in folgender tabellaren Form

K_i	$K_0 : \bar{z} = x_0/z$	$K_1 : \bar{z} = x_1/z$	\dots	$K_n : \bar{z} = x_n/z$
$w_i(z)$	$w_0(z)$	$w_1(z)$	\dots	$w_n(z)$

(6)

nennen wir α -Repräsentation dieser Funktion auf dem System der Kreissen K_i . Wenn $\alpha_{x_i/z}W(z, \bar{z}) = w_i(z)$, ($i = 0, 1, \dots, n$), so ist die Repräsentation (6) eindeutig und jedem Wert $\bar{z} = x_i/z$ entspricht eine und nur eine analytische Funktion $w_i(z)$. In seiner Arbeit [3] hat der Verfasser das sgn. α -Interpolationspolynom konstruiert, das die nichtanalytische Funktion $W(z, \bar{z})$ approximiert und der Tabelle (6) entspricht.

Suchen wir die näherungsweise Lösung der Aufgabe (4)–(5) in der Form (6). Dabei suchen wir solche Folge der analytischen Funktionen $w_i(z)$, ($i = 0, 1, \dots, N$) deren Grenzwerte auf den Kreissen $\bar{z} = x_i/z$, ($x_{i+1} - x_i = h = (A - a)/N$) mit den Grenzwerten der exakten Lösung näherungsweise gleich sind.

Die Formel (3) auf Grund (4) geht in

$$W(z, \bar{z}) \approx \alpha_{a/z}W + \frac{\bar{z} - a/z}{2}\alpha_{a/z}F(z, \bar{z}, W) \quad (7)$$

über.

Den ersten näherungsweisen Wert w_1 erhalten wir durch Anwendung des Operators $\alpha_{x_1/z}$ auf (7), d.h.

$$\alpha_{x_1/z}W = w_1 = \alpha_{a/z}W + \frac{x_1 - a}{2z}\alpha_{a/z}F(z, \bar{z}, W)$$

oder $w_1 = w_0 + \frac{h}{2z}F(z, x_0/z, w_0)$.

Auf dem Kreis $\bar{z} = x_1/z$ geht die Formel (7) in

$$W(z, \bar{z}) \approx \alpha_{x_1/z}W + \frac{\bar{z} - x_1/z}{2}\alpha_{x_1/z}F(z, \bar{z}, W) \quad (8)$$

über.

Den zweiten näherungsweisen Wert w_2 erhalten wir durch Anwendung des Operators $\alpha_{x_2/z}$ auf (8), d.h.

$$\alpha_{x_2/z}W = w_2 = w_1 + \frac{h}{2z}F(z, x_1/z, w_1).$$

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens erhalten wir auf eine gleiche Art und Weise die allgemeine rekurrente Formel

$$w_{n+1} = w_n + \frac{h}{2z}F(z, x_n/z, w_n) \quad (9)$$

die uns die näherungsweise Lösung der Aufgabe (4)–(5) in der tabellaren Form (6) gibt.

BEISPIEL. Es sei die areolare Differentialgleichung

$$DW = W \quad (10)$$

mit dem Anfangsbedingung

$$\alpha_0W = 1 \quad (11)$$

gegeben. Teilen wir das Intervall $[0, 1]$ auf N gleicher Abschnitten $h = 1/N$, $x_n = nh$, ($n = 0, 1, \dots, N$) und konstruieren wir ein System von Kreisen K_n : $\bar{z} = x_n/z$, ($n = 0, 1, \dots, N$). Man soll die α -Repräsentation der näherungsweise Lösung von der Aufgabe (10)-(11) in der tabellaren Form (6) finden und den Fehler auf dem n -ten Kreis abschätzen. Hier ist $F(z, x_n/z, w_n) = w_n$ und

$$w_{n+1} = w_n + \frac{h}{2z}w_n = w_n(1 + h/2z). \quad (12)$$

Die allgemeine Lösung der Differenzgleichung (12) hat die Form $w_n = (1 + h/2z)^n \varphi(z)$, wobei $\varphi(z)$ eine beliebige analytische Funktion ist. Durch Ausnützung der Anfangsbedingung (11), ($n = 0$) erhalten wir $w_0 = \varphi(z) = 1$ und

$$w_n = (1 + h/2z)^n = (1 + h/2z)^{x_n/h}.$$

Andererseits hat die exakte Lösung der Aufgabe (10)-(11) die Form $W(z, \bar{z}) = e^{\bar{z}/2}$ und $\alpha_{x_n/z}W = e^{x_n/2z}$. Nach einer kurzen Rechnung erhält man

$$w_n = e^{x_n/2z}(1 - x_n h/8z^2) + O(h^2)$$

und

$$e(x_n) = |\alpha_{x_n/z}W - w_n| = |e^{x_n/2z}x_n h/8z^2 + O(h^2)|.$$

Dabei sehen wir dass $e(x_n) \rightarrow 0$ wenn $h \rightarrow 0$.

BEMERKUNG 1. Näherungsweise Methode vom Euler-schen Typus (9) für die Aufgabe (4)-(5) lässt sich verallgemeinern. Anstatt (9) können wir die allgemeine lineare Methode der Form

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i W_{n+i} = \frac{h}{2z} \sum_{i=0}^k \beta_i F_{n+i} \quad (13)$$

betrachten. Wegen $F_{n+i} = F(z, x_{n+i}/z, w_{n+i})$ stellt die Relation (13) im allgemeinen Fall eine nichtlineare Differenzgleichung dar.

DEFINITION 2. Es lässt sich die sgn. α -Abweichung der methode (13) auf dem n -ten Kreis K_n : $\bar{z} = x_n/z$ als $e(x_n) = |\alpha_{x_n/z}W - w_n|$ definieren, wobei die Folge der analytischen Funktionen $\{\alpha_{x_n/z}W\}$, $n = 0, 1, \dots, N$, die α -Repräsentation der exakten Lösung ist und die Folge $\{w_n\}$, $n = 0, 1, \dots, N$, die α -Repräsentation der näherungsweise Lösung von der Aufgabe (4)-(5) darstellt.

DEFINITION 3. Die α -Repräsentation $\{w_n\}$ der näherungsweise Lösung konvergiert nach der α -Repräsentation $\{\alpha_{x_n/z}W\}$ der exakten Lösung von der Aufgabe (4)-(5) im Falle wenn

$$\lim_{h \rightarrow 0} e(x_n) = \lim_{h \rightarrow 0} |\alpha_{x_n/z}W - w_n| = 0.$$

Diese Konvergenz nennen wir α -Konvergenz, wenn es sich um die α -Repräsentation der nichtanalytischen Funktionen handelt.

BEMERKUNG 2. Im speziellen Fall reduziert sich die lineare näherungsweise Methode (13) auf die Methode vom Euler-schen Typus. Die Frage der α -Konvergenz von der Euler-schen Methode (9) lässt sich ähnlich wie bei der Euler-schen Methode zum näherungsweise Auflösen der gewöhnlichen Differentialgleichungen $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ untersuchen (siehe [4], s.24-32).

LITERATUR

- [1] M. Čanak, *Über die α -Approximation einer nichtanalytischen Funktion durch ein areoläres Polynom*, Z. angew. Math. Mech. **69**, 1989, 4, s.71-73
- [2] M. Čanak, *Über Existenz und Einzigkeit der Lösung einer areolären Differentialgleichung erster Ordnung*, Mathematica Balkanica, **8**:5, 1978, s.43-48
- [3] M. Čanak, *Über die α -Interpolation einer nichtanalytischen komplexen Funktion*, Z. angew. Math. Mech. **67**, 1987, 5, s.463-464
- [4] G. Milovanović, *Numerische Analysis*, III Teil, Beograd 1989, s.24-32

(received 27.07.1993.)

Brzakova 4, 11000 Beograd, Jugoslawien